

一个新 Pohozaev 恒等式及其在四阶拟线性椭圆方程中的应用

李媛, 安荣, 李开泰

(西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 对于具有 Dirichlet 边界条件的四阶 p -双调和椭圆方程, 建立了一个新的 Pohozaev 恒等式. 利用该恒等式, 得到了两类拟线性问题弱解不存在的充分性条件. 最后, 还讨论了具有 Navier 边界条件的 p -双调和问题的 Pohozaev 恒等式. 研究结果将对研究某些类 p -双调和方程解的非存在性起到很好的作用.

关键词: Pohozaev 恒等式; p -双调和; 非存在性

中图分类号: O175.29; O175.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)10-1245-03

New Pohozaev Identity and Application to Fourth Order Quasilinear Elliptic Equation

Li Yuan, An Rong, Li Kaitai

(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: For fourth order p -biharmonic elliptic equation with Dirichlet boundary conditions, a new Pohozaev type identity is established. In view of the identity, the sufficient conditions of nonexistence of weak solution for two classes of quasilinear problems are obtained. The Pohozaev type identity for p -biharmonic problem with Navier boundary conditions is discussed. These results exhibit the significance for nonexistence of solution of p -biharmonic problem.

Keywords: Pohozaev identity; p -biharmonic; nonexistence

Pohozaev 恒等式是 Pohozaev 在 1965 年建立的^[1], 随后发现它在证明某些偏微分方程解的非存在性方面有很好的作用. 该恒等式是对二阶半线性 Laplace 方程建立的, Guedda 等和 Otani 分别对 p -Laplace 方程建立了相应的恒等式和不等式^[2-3]. 对于四阶问题, 沈尧天等建立了半线性双调和方程的 Pohozaev 恒等式^[4], 然而没有任何与 p -双调和算子 ($\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u)$) 相关的 Pohozaev 恒等式结果, 因此本文所得到的 Pohozaev 型恒等式(4)是新的. 注意到式(4)是对 Dirichlet 边界条件建立的, 当考虑 Navier 边界条件时, 我们也给出了相应的结果. 因此, 根据 Pohozaev 恒等式的作用, 本文的结果

将对研究某些类 p -双调和方程解的非存在性起到很好的作用.

1 主要结果

我们考虑如下的 p -双调和椭圆问题

$$\Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) = f(x, u) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad (1)$$

边界条件为 Dirichlet 边界条件

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \quad (2)$$

式中: $p > 1$; $n \geq 2p + 1$; $\Omega \subset R^n$ 为一有界光滑单连通区域; ν 为边界 $\partial\Omega$ 的外法线方向.

我们称 $u \in V$ 为问题(1)、(2)的一个弱解当且

仅当

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^{p-2} \Delta u \Delta \phi dx = \int_{\Omega} f(x, u) \phi dx \quad \forall \phi \in V \quad (3)$$

这里 $V = W_0^{2,p}(\Omega)$, 并且装备范数

$$\|u\|_V = \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

本文的主要结果为如下的 Pohozaev 型恒等式.

定理 1 如果 $u \in V$ 是问题(1)、(2)的一个弱解, 那么它满足如下的 Pohozaev 型恒等式

$$\begin{aligned} \frac{2p-n}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \int_{\Omega} \langle x, Du \rangle f(x, u) dx = \\ \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle |\Delta u|^p ds \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

证明 记 $W = \langle x, D(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) \rangle \Delta u$, 那么

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W dx &= \int_{\Omega} \langle x, D(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) \rangle \Delta u dx = \\ &= \int_{\Omega} \Delta \langle x, D(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) \rangle u dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) u dx + \\ &= \int_{\Omega} \langle x, D \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) \rangle u dx \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle x, D \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) \rangle u dx &= \\ \int_{\Omega} u x_i D_i \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) dx &= \\ -n \int_{\Omega} u \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) dx - \\ \int_{\Omega} \langle x, Du \rangle \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) dx &= \\ -n \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \int_{\Omega} \langle x, Du \rangle f(x, u) dx \end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W dx &= \int_{\Omega} \Delta u x_i D_i(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) dx = \\ &= -n \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \\ \int_{\Omega} \langle x, D \Delta u \rangle |\Delta u|^{p-2} \Delta u dx &+ \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle |\Delta u|^p dx = \\ -n \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} \langle x, D(|\Delta u|^p) \rangle dx &+ \\ \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle |\Delta u|^p dx &= \\ -n \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx + \frac{n}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx &+ \\ \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle |\Delta u|^p dx \end{aligned}$$

综上所述, 我们就证明了式(4).

2 应用

作为式(4)的应用, 考虑 $f(x, u) = |u|^{\alpha-1} u$ 和 $f(x, u) = \lambda |u|^{p-2} u + |u|^{p^*-2} u$, 得到了当区域 Ω 为相对于原点的星形区域时, 问题(1)、(2)弱解不存在的充分条件.

例 1: 考虑问题

$$\left. \begin{aligned} \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) &= |u|^{\alpha-1} u && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 α 为一参数.

问题(5)的变分形式为

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^{p-2} \Delta u \Delta \phi dx = \int_{\Omega} |u|^{\alpha-1} u \phi dx \quad \forall \phi \in V$$

根据式(4), 考虑相对于原点的星形区域, 有

$$\begin{aligned} \frac{2p-n}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \\ \int_{\Omega} \langle x, Du \rangle |u|^{\alpha-1} u dx \geq 0 \end{aligned}$$

由于 $\langle x, \nu \rangle \geq 0$, 经过简单计算, 得到

$$\left(\frac{2p-n}{p} + \frac{n}{1+\alpha} \right) \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx \geq 0$$

因此

$$\left(\frac{2p-n}{p} + \frac{n}{1+\alpha} \right) \geq 0$$

这就意味着

$$\alpha \leq \frac{np-n+2p}{n-2p}$$

综上所述, 我们得到了问题(5)弱解不存在性定理.

定理 2 假设 Ω 为一相对于原点的星形区域, 如果参数 α 与 n, p 满足

$$\alpha > \frac{np-n+2p}{n-2p}$$

那么问题(5)不可能存在弱解.

从定理 2 的证明过程, 我们还可以得到定理 3.

定理 3 假设 Ω 为一相对于原点的严格星区域, 如果参数 α 与 n, p 满足

$$\alpha \geq \frac{np-n+2p}{n-2p}$$

那么问题(5)不可能存在弱解.

证明 在严格星形区域下, $\langle x, \nu \rangle \geq \rho$, 其中 $\rho > 0$, 剩余证明过程与定理 2 的证明相同, 在此省略.

例 2: 考虑问题

$$\left. \begin{aligned} \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) &= \lambda |u|^{p-2}u + |u|^{p^*-2}u && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里 λ 为一参数, $p^* = \frac{np}{n-2p}$.

问题(6)的变分形式为

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta \phi dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2}u \phi dx + \int_{\Omega} |u|^{p^*-2}u \phi dx \quad \forall \phi \in V \quad (7)$$

问题(6)弱解的不存在性定理如下.

定理 4 假设 Ω 为一相对于原点的星形区域, 如果 $\lambda < 0$, 那么问题(6)不可能存在弱解.

证明 根据式(4), 有

$$\frac{2p-n}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx + \frac{n\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{n-2p}{p} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \geq 0$$

由于 $\langle x, \nu \rangle \geq 0$, 在式(7)中取 $\phi = u$, 并代入到上式, 有

$$2p\lambda \int_{\Omega} |u|^p dx \geq 0$$

因此 $\lambda \geq 0$.

注释 1 如果考虑 Navier 边界条件

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}$$

定理 2~定理 4 也成立. 在这种情况下, $V = W^{2,p}(\Omega)$

$\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, Pohozaev 型恒等式(4)变为

$$\frac{2p-n}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx - \lambda \int_{\Omega} \langle x, Du \rangle f(x, u) dx = - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \frac{\partial(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

根据 Hopf 引理, 有

$$\frac{\partial(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)}{\partial \nu} > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$$

参考文献:

- [1] Pohozaev S. Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ [J]. Soviet Math Dokl, 1965(6):1408-1411.
 - [2] Guedda M, Veron L. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents[J]. Nonlinear Anal TMA, 1989, 13(8):879-902.
 - [3] Otani M. Existence and nonexistence of nontrivial solution of some nonlinear degenerate elliptic equations [J]. J Funct Anal, 1988, 76(1):140-159.
 - [4] 邓耀华, 沈尧天, 张维毅, 等. 半线性高阶椭圆型方程非平凡解的存在性与不存在性[J]. 系统科学与数学, 1986, 6(2):90-100.
- Deng Yaohua, Shen Yaotian, Zhang Weitao. Existence and nonexistence of nontrivial solutions for semilinear elliptic equations of higher order[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1986, 6(2):90-100.

(编辑 杜秀杰)